Solución

① El momento ϕ para una variable discreta es:

$$M_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[x=k] = 1$$

Tomamos $\mathbb{P}[x=k]$ de la distribución geométrica nos queda:

$$M_0 = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = 1$$

Usando sustitución para resolver la serie:

$$M_0 = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j+1-1} p = 1$$

$$M_0 = p \sum_{j=0}^{\infty} q^{j} = 1$$

$$M_0 = p\left(\frac{1}{1-q}\right) = 1$$

$$M_0 = \frac{p}{1-q} = 1$$ Para proceder, sustituimos q por $(1-p)$

$$M_0 = \frac{p}{(1-(1-p))} = 1$$

$$M_0 = \frac{p}{1-1+p} = 1$$

$$M_0 = \frac{p}{p} = 1$$

$$1 = 1$$ QED ü

② Para averiguar el valor de A, usamos el M_0. Recordemos que este momento nos ayuda a definir una variable aleatoria entonces:

$$M_0 = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[x=k] = 1$$

$$M_0 = \sum_{x=\phi}^{\infty} A(x-5)0.8^{x} = 1$$

Resolvamos:

$$M_0 = \sum_{x=0}^{\infty} A x\, 0.8^x - A5(0.8)^x = 1$$

$$M_0 = A \sum_{x=0}^{\infty} x\, 0.8^x - A5 \sum_{x=0}^{\infty} 0.8^x = 1$$

$$M_0 = A\left(\frac{0.8}{(1-0.8)^2} - \frac{5}{1-.8}\right) = 1$$

$$M_0 = A\left(\frac{.8}{0.04} - \frac{5}{0.2}\right) = 1$$

$$M_0 = A(20 - 25) = 1$$

$$A(-5) = 1$$

Ahora despejamos A:

$$A = \frac{1}{-5}$$

③ Para demostrar el valor esperado de $\binom{n}{k} q^{n-k} p^k$ podemos usar el M1, o la definición de la distribución Binomial y las propiedades del valor esperado.

Por definición una variable Binomial son n experimentos Bernoulli entonces

$$E[B_n] = E[B_1] + E[B_2] + E[B_3] + \dots + E[B_n]$$

donde B_x es un experimento Bernoulli independiente de los demás. También sabemos que $E[B] = p$ entonces:

$$E[B_n] = p + p + p + p + \dots + p = \underline{np}$$

④ La varianza la podemos calcular como $M_2 - M_1^2$ por lo que calculamos el M_1 para una variable Bernoulli:

$$M_1 = \sum_{K=\emptyset}^{1} \mathbb{P}[X=K] \cdot K = \emptyset \cdot q + 1 \cdot p = p$$

Ahora calculamos el momento dos:

$$M_2 = \sum_{K=0}^{1} \mathbb{P}[X=K] \cdot K^2 = \emptyset^2 q + 1^2 p = p$$

Sacamos la varianza:

$$VAR = M_2 - M_1^2 = p - p^2$$

Simplificamos:

$$VAR = p(1-p) = pq$$